Braid群のBurau表現の特殊化の"全射性"について(保型形式と関連するゼータ関数の研究)

織田, 孝幸

数理解析研究所講究録
805巻 1992年 185-198

Braid群のBurau表現の特殊化の"全射性"について

京大数理研　織田孝幸(Takayuki Oda)

§0. はじめに.

B_nをn-stringsのArtin Braid群とする。tを変数とする$\mathbb{Z}$係数のLaurent多項式の環$\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$の元を成分とする次数$n-1$の一般線型群$GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$によって$B_n$を表現するBurau表現と呼ばれるものがある(cf. Birman [1], Chap. 3)。

kを自然数として, $\zeta = \exp(2\pi i/k)$とおく。ζは1のkべき乗根である。特殊化$t \mapsto \zeta$によって, $B_n \to GL_{n-1}(\mathbb{Z}[\zeta])$という表現ができる。$\mathbb{Z}[\zeta]$のideal $\mathfrak{a}$をえらび, reduction modulo $\mathfrak{a}$を考えて, さらに表現$B_n \longrightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}[\zeta]/\mathfrak{a})$を得る。$n, k, \mathfrak{a}$がある条件を満すとき, この表現の像は有限環$\mathbb{Z}[\zeta]/\mathfrak{a}$上のあるunitary群になると予想される。これを$n=3$, $n=4$の場合に証明し, この種の予想を正当化するのが, この小論の目標である。ここでは論じないが, これはあるタイプの代数曲線のlevel構造付きのmoduli空間の既約性を意味してい, 幾何学的解釈がある。

§1. The reduced Burau representation

B_nをn-系のArtin組み紐群とし，$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-1}$をその標準的な生成元とする。$\{\sigma_i\}_{1 \leqq i \leqq n-1}$たちには，周知の基本関係式

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \qquad (1 \leqq i \leqq n-2)$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \qquad (|i-j| \geqq 2)$$

がある。

記号$\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$によって，整数環$\mathbb{Z}$上のtを変数とする多項式環$\mathbb{Z}[t]$のt^{-1}による局所化を表す。このときB_nから$\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$上の一般線型群$GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$へ，被約なBurau表現と呼ばれる表現$\pi$が定義できる。これは通例Foxのfree differential calculusによって定義されるが（cf. Birman [1], ch. 3），ここでは手短かにかたづけるために，直接に生成元ごとに次のように定義する。

<u>定義 1.1</u>　表現$\pi : B_n \longrightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$は

$$\sigma_1 \longmapsto \begin{bmatrix} \begin{matrix} -t & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} & O \\ O & 1_{n-3} \end{bmatrix} ; \quad \sigma_r \longmapsto \begin{bmatrix} 1_{r-2} & & \\ & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ t & -t & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} & \\ & & 1_{n-r-2} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{n-1} \longmapsto \begin{bmatrix} 1_{n-3} & O \\ O & \begin{matrix} 1 & 0 \\ t & -t \end{matrix} \end{bmatrix} \qquad (\text{但し，} 2 \leqq r \leqq n-2)$$

によって定める。ここで1_sはs次の単位行列である。明示されていない行列成分は全て0。

環 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ の各元 $p(t)$ に対して，$p(t)$ の共役元 $\overline{p}(t)$ を

$$\overline{p}(t) = p(t^{-1})$$

によって定める。$p \longmapsto \overline{p}$ は $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ に位数2の自己同型を定める。このとき $\overline{p}$ を p の t-共役という。$\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ に成分をもつ次数 m の行列 $h \in M_m(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ に対し，h の t-Hermite 共役 h^* を

$$h^* = {}^t\overline{h}$$

によって定める。$h = h^*$ のとき h を t-Hermitian であるという。さて Burau 表現は次の"ユニタリー性"をもつ。

<u>補題 (1.1)</u>　$M_{n-1}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ の中に t-Hermite 行列 h であって，Burau 表現 $\pi : B_n \longrightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ の像で不変なものが scalar 倍を除いて一意的に存在する。

(証明) 易しいので省略する。直接計算で確かめられる。$\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ の商体 $Q(t)$ の中で書くとき，h は scalar 倍を除いて 3-対角行列

$$h = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{t+1} & 0 & \cdots \\ -\frac{1}{t^{-1}+1} & 1 & -\frac{1}{t+1} & \\ 0 & -\frac{1}{t^{-1}+1} & 1 & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

で与えられる。

<u>注意</u>.　補題 (1.1) のユニタリ性は，Ihara [2] と Tsuchiya-Kanie [3] の共形場の理論のユニタリ性とも関連がある。位相幾何学的

にも自然な説明があるべきであるが，知らない。代数幾何学的説明は別の機会に書く。

<u>補題 (1.2)</u> Burau 表現 π は既約である．

(証明) $\pi(\sigma_i)$ が全て quasi-reflection，つまり $\pi(\sigma_i)-id.$ が rank 1 の行列であることより，すぐに示せる．

群 B_n の中心 $Z(B_n)$ は $z=(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^n$ で生成される無限巡回群である．次は周知の事実である．

<u>補題 (1.3)</u> $Z(B_n)$ は π によって scalar 行列で表現され，その像は $t^{n(n-1)}\cdot 1_{n-1}$ である．

§2. 第一段階の特殊化，および Burau 表現の twist

k を自然数とする。$q=e^{2\pi i/k}$ とおく。q は 1 の原始 k 乗根である。$K=\mathbb{Q}(q)$ は円分体で，$\mathcal{O}_K=\mathbb{Z}[q]$ はその全整数環 $F=\mathbb{Q}(q+q^{-1})$ は極大な総実部分体である。特殊化 $t\mapsto q$ によって，新しく表現 $\pi_k: B_n \longrightarrow GL_{n-1}(\mathcal{O}_K)$ を得る。h を $t\mapsto q$ によって特殊化したものも同じ記号で書くとき π_k の像はエルミート行列 h に関する $n-1$ 次のユニタリー群 $U_{n-1}(h)$ に入る。表現 π_k もまた既約である。

B_nの標準生成元σ_iに対し，n次対称群S_nの互換$(i,i+1)$を対応させることによって全射準同型$B_n \longrightarrow S_n$を得る。これの核を純組み紐群(pure braid group)，あるいは色つき組み紐群(colored braid group)といい，記号P_nで表す。P_nの標準的生成元としては，

$$A_{ij} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\cdots\ \sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\ \sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1} \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

がある。

注意。$\{A_{ij}\}$の間の基本関係式を書いた標準的教科書(複数)には何故かそろってミスプリントが多い。注意して取り扱うべし。

さて上の表現$B_n \longrightarrow S_n$と対称群S_nの符号表現$\mathrm{sgn}: S_n \to \{\pm 1\}$の合成を$\mathrm{sgn}: B_n \longrightarrow \{\pm 1\}$と書く。$\mathrm{sgn}$の核は$B_n$の中の指数2の正規部分群である。これを$B_n^{\mathrm{even}}$と書く。

<Twist of π_k>

以下あとの話しを述べやすくするため，π_kを指標でひねった表現ρ_kを定義する。kは$(n-1)$と互いに素とする。このとき各生成元σ_iに対して$\chi_k(\sigma_i) = -q^l$とおいて，指標$\chi_k: B_n \longrightarrow GL_1(\mathcal{O}_K) = \mathcal{O}_K^*$を定める。ここで$l$は$l\cdot(n-1) \equiv 1 \pmod{k}$となる整数。各$\sigma_i$に対して，$\det\pi_k(\sigma_i) = -q$となることに注意して次のようにする。

__定義 2.1__　新しく表現 $\rho_k : B_n \longrightarrow GL_{n-1}(\mathcal{O}_K)$ を

$$\rho_k = \chi_k^{-1} \otimes \pi_k$$

で定める。このとき σ_i に対し，$\det \rho_k(\sigma_i) = (-1)^n$ となる。

さて ρ_k の像 $\rho_k(B_n)$ は

$$SU_{n-1}^{\pm}(\mathcal{O}_K ; h) = \{ g \in GL_{n-1}(\mathcal{O}_K) \mid {}^t\bar{g} h g = h, \det(g) = \pm 1 \}$$

に含まれる。特に n が偶数であるときは $\rho_k(B_n)$ が，n が奇数のときは $\rho_k(B_n^{even})$ が

$$SU_{n-1}(\mathcal{O}_K ; h) = \{ g \in GL_{n-1}(\mathcal{O}_K) \mid {}^t\bar{g} h g = h, \det(g) = 1 \}$$

に含まれる。特に $\rho_k(P_n)$ は $SU_{n-1}(\mathcal{O}_K ; h)$ に含まれる。さらに，ρ_k は B_n の中心 $Z(B_n)$ 上で trivial になっていることに注意しておく。

次の節にゆく前に，基本的事実をひとつ確認しておく。

__補題 (2.1)__　特殊化された Burau 表現 $\pi_k : B_n \longrightarrow GL_{n-1}(\mathcal{O}_K)$ の像が有限群とする。すると scalars を法として，P_n の標準生成元の像 $\pi_k(A_{ij})$ たちの位数はせいぜい 5 である。

__系__　k が奇数で $k \geqq 7$ のとき，あるいは k 偶数でも $k \geqq 14$ ならば，π_k の像は無限群である。

§3. 予想と主結果.

$F=\mathbb{Q}(q+q^{-1})$, $\mathcal{O}_F$ を F の全整数環, $\mathfrak{a}$ を $\mathcal{O}_F$ の ideal とする。表現 ρ_k を reduction mod $\mathfrak{a}$ してさらに特殊化する。

定義 3.1　$\mathfrak{a}_K=\mathfrak{a}\cdot\mathcal{O}_K$ とする。$GL_{n-1}(\mathcal{O}_K)$ の元を modulo $\mathfrak{a}_K$ で考えて, $GL_{n-1}(\mathcal{O}_K)\to GL_{n-1}(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a})$ を考える。h も mod $\mathfrak{a}_K$ で考えて, $SU_{n-1}(\mathcal{O}_K;h)\longrightarrow SU_{n-1}(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a};h)$ という標準準同型を考える。これと ρ_k との合成を $\rho_{k,\mathfrak{a}}$ と書く。

P_n に制限すると

$$P_n\longrightarrow SU_{n-1}(\mathcal{O}_K;h)\longrightarrow SU_{n-1}(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a};h)$$

という表現が得られる。

予想　π_k は無限の像をもつと仮定する。$\mathcal{O}_F$ の ideal $\mathfrak{a}$ が k と coprime であるとき,

$$\rho_{k,\mathfrak{a}}: P_n\longrightarrow SU_{n-1}(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}_K;h)$$

は全射であろう。

次が得られている.

定理 (3.1)　(i) $n=3$ のとき, 予想は正しい.

(ii) $n=4$ のとき, k が 6 と互いに素であって, $k=5$ あるいは, $k\geq 11$ のとき予想は正しい. ($k=7$ はわからない).

定理には次のような応用がある。まず $\rho_{k,\mathfrak{a}}$ という表現は center $Z(P_n)=Z(B_n)$ 上 trivial であることに注意する。すると $\rho_{k,\mathfrak{a}}$ は $P_n/Z(P_n)$ の表現を引き起す。この商は次のようになる。

<u>命題 (3.2)</u>　$n\geqq 3$ とする. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (1次元複素射影空間) の $n+2$ 個の点 $x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}$ を固定する. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の向き付けを保つ微分同相で $x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}$ をそれぞれ自分自身に移すもの全体のなす群 (積は写像の合成) を, $\mathrm{Diff}^+(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \{x_0, \cdots, x_{n+1}\})$ とする。これに compact-open topology を入れる。π_0 を弧状連結成分をとる functor とする。このとき

$$P_n/Z(P_n) \cong \pi_0 \mathrm{Diff}^+(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \{x_0, \cdots, x_{n+1}\}).$$

<u>例</u>. $n=3$ のとき, $P_3/Z(P_3) \cong \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})-\{0,1,\infty\}, *)$. $*$は基点。

$n=4$ のとき, $P_4/Z(P_4) \cong \pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - \{$  $\}, *)$。

定理によって, $n=4$ のとき例えば $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の covering で, $\{$  $\}$ のみで分岐し, $SU_{n-1}(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}_K; h)$ を Galois 群にもつ Galois covering が存在することがいえる。$n=3$ のとき, $P_3/Z(P_3)$ は rank 2 の自由群と同型で, $B_3/Z(B_3) \cong PSL_2(\mathbb{Z})$ という同一視によって, level 2 の主合同部分群 $\Gamma(2)$ と同一視される。このとき $\rho_{k,\mathfrak{a}} : \Gamma(2) \longrightarrow SU_2(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}_K; h)$ の kernel は有

限個の例外を除いて，非合同部分群である。

§4. 証明の概略.

主定理の証明は3つのstepsで行なう.

Step 1. $\mathfrak{a}$ が $\mathcal{O}_F$ の素idealであるとき.

Step 2. $\mathfrak{a}$ が $\mathcal{O}_F$ の素idealのべきであるとき.

Step 3. 一般の場合.

Step 2 と Step 3 は代数群の結果を用いた $n=3,4$ に限らず一般に通用する議論で解決される。Step 1 が予想の完全解決のためには，もっとも重大な障害である.

Step 1 をあとまわしにして，Step 2,3 を先に説明する.
Step 2 は次の Lemma で o.k.

補題 (4.1) $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}^n$ $(n\geqq 2)$ とする。但し $\mathfrak{p}$ は $\mathcal{O}_F$ のある素ideal。$\mathfrak{p}$ は $\det(h)$ を割り切らないと仮定する。このとき，X を $SU_m(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}_K\,;h)$ の部分群であって，自然なreduction mod $\mathfrak{p}$ による全射 $SU_m(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}_K\,;h)\longrightarrow SU_m(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}\mathcal{O}_K\,;h)$ によって全体 $SU_m(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}\mathcal{O}_K\,;h)$ を覆うものとするとき，X は $SU_m(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}_K\,;h)$ 自身と一致する.

(証明) Matthews-Vaserstein-Weisfeiler [4] にある.

Step 3 はある種の近似定理である。$\mathfrak{a}$ を素 ideal の積に分解し，$\mathfrak{a} = \prod_i \mathfrak{p}_i^{e_i}$ とする。Artin 環 $A = \mathcal{O}_F/\mathfrak{a}$ の Jacobson radical を $\mathfrak{r}$ と書く。

<u>定理 (4.2)</u>　Y を $SU_m(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}_K : h)$ の部分群で次の 2 条件をみたすものとする。

(i) 各 i に対し，reduction mod $\mathfrak{p}_i$ による Y の $SU_m(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}_K : h)$ の中での像は全体 $SU_m(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}_K : h)$ と一致する。

(ii) $\gamma \in Y$ の adjoint 表現による trace を mod $\mathfrak{r}^2$ で考える。これらが $A/\mathfrak{r}^2$ の中で生成する部分環を考える。このとき

$$\mathbb{Z}[\mathrm{trace}\{\mathrm{Ad}(\gamma \bmod \mathfrak{r}^2)\}_{\gamma \in Y}] = A/\mathfrak{r}^2$$

が成立すると仮定する。

この条件の下で，$Y = SU_m(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}_K : h)$。

(証明) この結果は Weisfeiler [ ] の Theorem (7.2) である。

さて Step 1 を考えよう。$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ とする。$\mathfrak{p}$ は素 ideal。このとき $\mathfrak{p} \cdot \mathcal{O}_K$ について 2 つの場合がある。$\mathfrak{a}$ と h とは互いに素であるので，$\mathfrak{a}$ は K/F では不分岐。

(i) $\mathfrak{p} \cdot \mathcal{O}_K = \mathfrak{P}_K \cdot \overline{\mathfrak{P}_K}$，完全分解する。

(ii) $\mathfrak{p} \cdot \mathcal{O}_K$ は inert する，つまり remain prime.

(i) の場合, $SU_m(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}\mathcal{O}_K; h) \hookrightarrow GL_m(\mathcal{O}_K/\mathfrak{P}_K) \times GL_m(\mathcal{O}_K/\bar{\mathfrak{P}}_K)$ で第一因子に射影することにより, $SU_m(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}\mathcal{O}_K; h)$ は $SL_m(\mathcal{O}_F/\mathfrak{p})$ と同型になる。

(ii) の場合 $\mathcal{O}_F/\mathfrak{p} = \mathbb{F}_r$ とすると, $SU_m(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}\mathcal{O}_K; h)$ は $\mathbb{F}_r$ 上の m 次有限 unitary 群 $SU_m(\mathbb{F}_r)$ と同型になる。

以下で証明のためにポイントとなる論点をまとめる。

<u>事実 (4.3)</u> (a) 生成元 A_{ij} の像の位数について.

$n=3$ のとき, $\begin{cases} k \text{ が奇数のとき, } \operatorname{ord}\{\rho_{k,\alpha}(A_{ij})\} = k. \\ k \text{ が偶数のとき, } \operatorname{ord}\{\rho_{k,\alpha}(A_{ij})\} = k/2. \end{cases}$

$n=4$ のとき, k が 6 と互いに素であるとき,

$$\operatorname{ord}\{\rho_{k,\alpha}(A_{ij}) \bmod \{\text{scalars}\}\} = k.$$

(b) 表現 $\rho_{k,\alpha}$ は既約である。

(c) 生成元の像の trace の性質. とりわけ $n=4$ のとき trace は $\zeta \mapsto \zeta^{-1}$ という自己同型で不変でない。

上の事実と, 次に示す $SL_2(\mathbb{F}_r) \cong SU_2(\mathbb{F}_r)$, あるいは $SL_3(\mathbb{F}_r)$, $SU_3(\mathbb{F}_r)$ の部分群の分類表を用いて, $\rho_{k,\alpha}$ の像は小さくなりえず, 全体と一致することを示す。

〈 $SL_2(\mathbb{F}_r) \cong SU_2(\mathbb{F}_r)$ の部分群 〉

$r = p^f$ とする。r' は r の約数を一般に表わす．$SL_2(\mathbb{F}_r)$の既約な部分群 G は次のいずれかになる。

(A)．標数 0 に持ち上がらないとき．このときは次の定理で G は尽される。

定理（Dickson）G を $SL_2(\mathbb{F}_r)$ の既約部分群で標数 0 に持ち上がらないものとする。このときある $\mathbb{F}_{r'} \subset \mathbb{F}_r$ があって $G = SL_2(\mathbb{F}_{r'})$。

(B) 標数 0 に持ち上がるとき。これは $SL_2(\mathbb{C})$ or $SU_2(\mathbb{C})$ の有限部分群を数え尽すことに帰着する。4つの場合がある。

(0) Imprimitive irreducible subgroups. つまり G が単項表現によって $SL_2(\mathbb{F}_r)$の中で実現されるときは，$A \triangleleft G$ という abel 部分群があって，$G/A \cong \mathfrak{S}_2$（2次対称群）。

Primitive cases は次の3とおり。

定理（昔の人）$SL_2(\mathbb{C})$ の primitive irreducible subgroup は $\widetilde{\mathfrak{S}}_4$，$SL_2(\mathbb{F}_3)$ or $SL_2(\mathbb{F}_5)$．ここで $\widetilde{\mathfrak{S}}_4$ は S_4 の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$を中心とする自明でない中心拡大。$SL_2(\mathbb{F}_3)$ と $SL_2(\mathbb{F}_5)$ も同じく，A_4 と A_5 の中心拡大である。

⟨ $SL_3(\mathbb{F}_r)$ の部分群 ⟩ （$n=4$ のときのために） $r=p^f$ とする.

(A) <u>The case of non-liftable groups</u>

<u>Theorem</u> (Mitchell, Hartley, Bloom)

Let G be an irreducible subgroup of $SL_3(\mathbb{F}_r)$ which cannot be lifted. Then G is isomorphic to one of the following:

(i) $SL_3(\mathbb{F}_{r'})$ for some $\mathbb{F}_{r'}\subset\mathbb{F}_r$.

(ii) In case, $3\mid[\mathbb{F}_r:\mathbb{F}_{r'}]$ and $3\mid(\#\mathbb{F}_{r'}-1)$, an extension of $SL_3(\mathbb{F}_{r'})$ by a group of order 3.

(iii) $U_3(\mathbb{F}_{r'})$ for some $\mathbb{F}_{r'}$ with $2\mid[\mathbb{F}_r:\mathbb{F}_{r'}]$.

(iv) In case, $6\mid[\mathbb{F}_r:\mathbb{F}_{r'}]$ and $3\mid(r'+1)$, an extension of $U_3(\mathbb{F}_{r'})$ by a group of order 3.

(v) If $p\neq 2$, $\mathbb{F}_{r'}\subset\mathbb{F}_r$ and $r'>3$, either $PSL_2(\mathbb{F}_{r'})$ or $PGL_2(\mathbb{F}_{r'})$
("直交群")

(vi) If $p=5$ and f is even, a covering group of A_7,
(i.e. $G/\{\text{scalars}\}\cong A_7$).

(B) <u>The case of liftable groups.</u> $G\subset SU_3(\mathbb{C})$.

(0) G is imprimitive irreducible $\Rightarrow$ $\exists A\triangleleft G$, abelian such that $G/A\cong S_3$, or $G/A\cong A_3$.

<u>Theorem</u> (classical) The list of primitive irreducible subgroups of $SU_3(\mathbb{C})$.

(i) a split extension of a non-abelian group P of order 3^3 and exponent 3 by $SL_2(\mathbb{F}_3)$. (位数 $\leqq 27 \times 24$)

(ii) A_5 (位数, 60)

(iii) $\tilde{A}_6$ $(1 \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \tilde{A}_6 \to A_6 \to 1)$ (位数, 360×3)

(iv) $PSL_2(\mathbb{F}_7)$ (位数, 168) ∎

References

[1]. Birman, J., Braids, links and mapping class groups. Annals of Math. Studies.

[2] Ihara, Y., Profinite braid groups, Galois representations, and complex multiplication. Ann. of Math. vol. 123 (1986), 43–106

[3] Tsuchiya, A., and Y. Kanie., Vertex operators in two dimensional conformal field theory on $\mathbb{P}^1$ and monodromy representation of braid groups. Adv. Studies in pure Math. vol. 16 (1988) 297–372

[4] Matthews, C.R., Vaserstein, L.N., and Weisfeiler, B. Congruence properties of Zariski-dense subgroup I Proc. London Math. Soc. vol (3), 48 (1984), 514–532

[5] Weisfeiler, Boris, Strong approximation for Zariski-dense subgroups of semisimple algebraic groups. Ann. of Math. vol 120 (1984), 271–315